



TITLE:

結合スピンモデルによる地磁気・
太陽磁場反転のダイナミクス (オイ
ラー方程式の数理: カルマン渦列と
非定常渦運動100年)

AUTHOR(S):

森川, 雅博; 中道, 晶香; 毛利, 英明; Schmitt, D.;
Ferriz-Mas, A.; Wicht, J.

CITATION:

森川, 雅博 ...[et al]. 結合スピンモデルによる地磁気・太陽磁場反転のダイナミクス (オイ
ラー方程式の数理: カルマン渦列と非定常渦運動100年). 数理解析研究所講究録 2012,
1776: 174-185

ISSUE DATE:

2012-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171752>

RIGHT:

結合スピンモデルによる地磁気・ 太陽磁場反転のダイナミクス

森川 雅博 (お茶大), 中道晶香 (京産大神山天文台), 毛利英明 (気象研),
D. Schmitt(Max-Planck-Institut fur Sonnensystemforschung)、
A. Ferriz-Mas(Departamento de Fisica Aplicada, Universidad de Vigo),
J. Wicht(Max-Planck-Institut fur Sonnensystemforschung)

平成 23 年 10 月 9 日

概要

地磁気の反転ダイナミクスを記述する現象論モデルとして、結合したマクロスピンモデルを提案する。このモデルの構成は、一般に磁場を生成・維持するダイナモ機構は複数の最小要素 (ダイナモ要素) から成り、それらの磁場・電流を介した大域的相互作用によって全体の複雑なダイナミクスが構成される、という考えに基づく。本来、磁気流体力学で記述される複雑な地磁気反転の力学からその本質を抽出したミニマルモデルになっている。実際このモデルは、時間発展、パワースペクトル、定常極性期間分布、短期変動など、ほとんどの地磁気反転や変動の主要観測事実を再現する。地球の場合、ダイナモ要素はコリオリ力に支えられたテラーセルであると考えられる。このモデルは、平均場 (HMF) モデルと類似で、方向のほぼそろったスピンのコア相といろいろな方向に速く変動するハロー相との共存を特徴とする。大局的な双極子磁場を決める前者を、速く変動する後者が小さな揺動を与え続けることによって間欠的に地磁気反転が起こるのである。それぞれの相は、地磁気の定常成分、変動成分に相当する。従って、逆磁束斑の存在とその速い時間変動はハロー相のスピンのよると考えられる。さらにこのモデルは、倉本モデルと類似であり、引き込み現象も記述する。つまり、地磁気ダイナミクスだけでなく、全く同じモデルでスピン数を増やすと引き込み現象が発現して、準周期的な太陽磁場変動の特徴を良く再現する。さらにこの準周期性とともに、低振動数領域で普遍的にべき的な揺らぎが存在することも見出される。これは太陽黒点変動に見出される $1/f$ 揺らぎに相当するだろう。このモデルを元に、MHD 基礎方程式の重要項の解析から、惑星・衛星・太陽にわたる、磁気モーメントの大きさに対するスケーリング則が得られる。そしてこのスケーリング則は実際の観測値からきれいに成立していることがわかる。この帰結についても議論する。

1 地球の磁場、宇宙の磁場

William Gilbert によって地球が大きな磁石であることがわかった (Gilbert 1600)。そしてそれはほぼ双極磁場であり、地球は過去何億年にもわたってその極性の反転を繰り返してきた (図 1)。このダイナミクスはいまだ解明されていない。

地磁気は地球中心の流体鉄外殻でダイナモ作用によって作られていることはわかっているので、電磁流体力学に基づいて大きな計算がいくつかなされた (Roberts & Glatzmaier 2000), (Kono & Roberts 2002)。しかし計算のパラメーターが実際の地球のそれと何桁もかけ離れているので、確定的な結論には至っていない。

ここでは電磁流体力学の第1原理から計算するのでなく、磁場反転に何が主要機構なのかを推測しその機構を実現する最も簡単なモデルを作って、磁場反転ダイナミクスの本質を探ってみたい。このモデルを考えるときの重要な事実は、双極磁場はたいていの惑星や恒星さらにはその衛星までもが、かなり普遍的に持っている性質らしいことである。ダイナモ機構の普遍性であるともいえる。したがって構成すべきモデルは、いろいろな天体に対して適用できる、できるだけ普遍的なものであるはずである。この最も簡単で普遍的な地磁気の極性反転を与えるモデルを考えることが課題である。

モデル構築に際してもうひとつの重要な事実は、地球磁場はほぼ10万年の時間尺度で不規則に反転を繰り返しているが、もっと短い時間尺度が共存していることである。実際地磁気の磁極反転に要する時間は数千年であり、また全体のほぼ定常な双極磁場だけでなく、やはり数千年の時間尺度で比較的早く変動する局所的な磁場の成分が存在する。地球磁場変動が数千年、数十万年、数億年にわたって幅広い時間尺度を持つことは特徴的である。我々のモデルはこの事実を説明する形で構成されなければならない。

2 結合スピンモデル

地磁気を記述するのは回転系における熱拡散を含めた電磁流体力学である。この大変複雑な方程式系を正確に解いていく研究はいくつかあり、いろいろな様相がわかってきている。この論文ではそれら基本様相を元に、地磁気を記述するダイナミクスの本質を簡単なモデルで記述したい。

まず、地磁気の観測から移動速度 $0.1 - 1 \text{ mm/sec}$ で比較的速く変動する逆磁束斑が存在することから、地磁気を作るダイナモは部分構造を持つことが強く推測される。それらの協同する結合により地磁気の全体構造が形成されるだろう。

地球のテイラー数が 10^{28} となるので、そのような部分構造は、卓越するコリオリ力によって支えられている局所的なテイラーセル(対流柱)に付随する磁場構造であろう。実際このことは、基礎方程式をスーパーコンピュータで解いて得られる描像と整合している (Kida 1998)。この局在する部分構造において、磁場を増幅し独自のダイナモ機構が働いているという意味で、この局在構造をダイナモ要素と呼ぼう。これはテイラーセルそのものではなく、それに巻きついた電流が作る局所的な磁場である。

この要素を特徴付ける最も簡単な量は磁気双極子 \vec{s}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) であり、これはベクトルである。相互作用はスカラーで表現されるから、その最も簡単な形は磁気双極子同士の内積で表される。このようにして磁気双極子たちの時間発展が、ラグランジアン $L = K - V$:

$$K \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{d\vec{s}_i}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i^2, \quad (1)$$

$$V \equiv \mu \sum_{i=1}^N \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{s}_i \right)^2 + \frac{\lambda}{2N} \sum_{i < j}^N \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \quad (2)$$

で表される結合スピンモデルが得られる。ここでダイナモ要素 \vec{s}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) は、外殻流体鉄中の赤道面に輪状に等間隔に配置されたとする。さらに \vec{s}_i は、中心とその要素を結ぶ動径に垂直な平面上で運動すると簡単化すると、ただひとつのパラメータ θ_i を用いて $\vec{s}_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ とあらわされる。すると磁気双極子に対する運動方程式は ($1 \leq i \leq N$),

$$\ddot{\theta}_i(t) = - \frac{\partial V}{\partial \theta_i(t)}, \quad (3)$$

とかける。これはパラメーター μ, λ 2 個だけを持つ。どちらを省略しても地磁気ダイナミクスを記述できないので、これはミニマルモデルといえるだろう。

パラメタ μ は各スピンが地球自転軸方向への揃い易さ、あるいはテイラーセルに巻きつく電流のやわらかさを表している。パラメタ λ はそれぞれのスピンあるいはテイラーセルに巻きつく電流たちの揃い易さを表している。

ここで、式 (3) が決定論的な時間発展であることに着目しよう。それにもかかわらず地磁気のランダムな極性反転ダイナミクスを適切に記述できるのである。これは以下に見るように、系が定常成分と変動成分を与える 2 相構造を持ち、変動成分が定常成分をたたくことによってその確率的な転移が起こることによる。一方、式 (3) に加えてあからさまに摩擦項やランダム力項を入れても同様の議論ができる (Mori et al. 2011)。この場合は、隣同士のスピンたちだけの局所的な相互作用で、地磁気反転ダイナミクスを十分記述できる。

磁気双極子たちから作られる自然な秩序変数を、

$$\vec{M}(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{s}_i(t) \quad (4)$$

($\vec{M}(t) \in [-1, 1]$) と定義することができる。これは地球磁場全体を特徴付ける平均場である。さらに必要であれば、赤道面上の各サイトに配置された個々の磁気双極子から磁場を作り、それらを重ね合わせて地球全体の磁場 \vec{B} の様子を記述することもできる。実際、場所 \vec{y} での磁場は

$$\vec{B}(\vec{y}) = \sum_{i=1}^N \frac{3(\vec{s}_i \cdot \vec{n}_i) \vec{n}_i - \vec{s}_i}{|\vec{y} - \vec{x}_{(i)}|^3}, \quad (5)$$

と表される。ここで、個々のスピン \vec{s}_i は場所 $\vec{x}_{(i)}$ に配置され、 $\vec{n}_i \equiv (\vec{y} - \vec{x}_{(i)}) / |\vec{y} - \vec{x}_{(i)}|$ は単位ベクトルである。

3 結合スピンモデル解析の結果

まず地磁気の主要な観測結果をまとめておこう。160My (My $\equiv 10^6$ 年) にわたる磁極反転履歴時系列、そのパワースペクトル、磁極安定期間の長さの頻度分布は、図 (1) のようになる。

では、式 (3) で記述される結合スピンモデルの解析結果を見てみよう。図 (2) に、観測に対応させて結果をまとめる。グラフに描いた計算で設定したパラメーターは $\mu = -1$ 、 $\lambda = -1.8$ 、 $N = 9$ である。これらのパラメーターを変えてもべき的な振る舞いは変わらないが、べき指数が少し変化する。

典型的な磁極反転をひとつ ($t = 31264$) 選び、その前後の磁場の振る舞いを調べたのが (図 3) である。磁極安定期間に比べて、急激に磁極反転する。

地磁気の観測からは、160My のうちに 336 回の極極反転が起こっている。一方我々の数値計算からは 60k 計算時間のうちに 199 回の極極反転が起こっている。従って、極極反転頻度を一致させると、1 計算時間はおよそ 1570y となる。この換算を用いると、平均反転時間 = 7.49ky、最大磁極一定期間 (スーパークロン) = 7.8My、パワースペクトルの 2 つのべきの交差点 = 3.14My、反転にかかる平均時間 = 7.49ky、などがわかる。いずれも、観測値の程度である。このように非常に簡単な結合スピンモデルは、地磁気反転履歴をよく再現する。パラメーターを多少変えても定性的な振る舞いは変わらない。

このように、結合スピンモデルが地磁気ダイナミクスをよく記述する理由はなんだろうか? そのために背景となる物理をみて行こう。

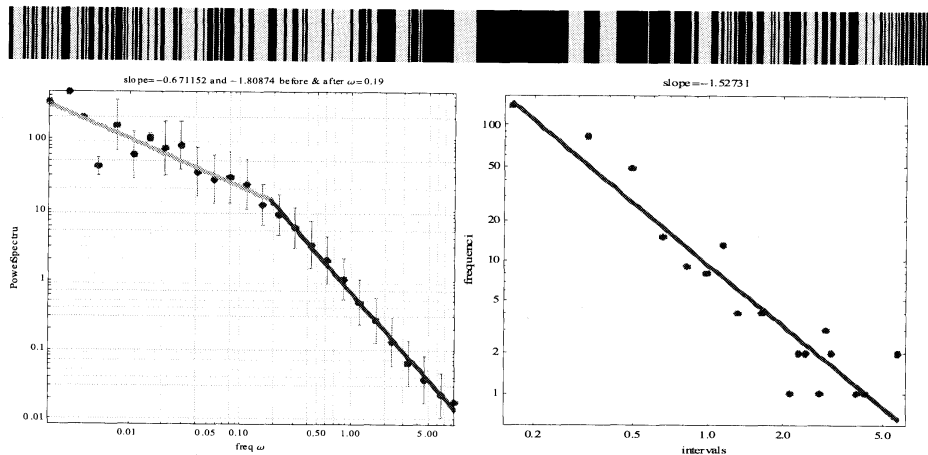


図 1: $160My$ ($My \equiv 10^6$ 年) にわたる磁極反転時系列、そのパワースペクトル、磁極安定期間の長さの頻度分布。(上) 地球磁極反転の時系列。左端が現在。黒色が現在の極性、つまり北極が S 極。黄色が反転磁極、つまり南極が S 極。(左下) 地磁気の磁場変動時系列のパワースペクトル。傾きが -0.7 , および -1.8 の 2 つのべきで特徴付けられる。(右下) 一定した磁極期間の頻度分布。これもべき的な特徴がある。傾きは -1.5 。

4 物理的背景—コア・ハロー構造と引き込み

まず、我々の結合スピンモデルは、HMF モデル (=Hamiltonian Mean Field model) と類似して、長距離相互作用する決定論的力学系である (Antoni and Ruffo 1995, Compa et al. 2009)。ただ、前者の結合スピンモデルにはポテンシャル項が付随して、スピンたちが自転軸方向にそろいやすくなっている。

両者はともにコア・ハローの二相共存構造を作ることが本質的である。コア相は、スピンが上または下にほぼそろっている平均場であり、長い時間尺度を持った双極磁場の定常成分を形成する。一方ハロー相は、短い時間尺度で不規則に回転するスピンたちから成り、磁場の変動成分を形成する。これらハロー相のスピンたちは常にコア相のスピンをランダムに励起し、時々反転させる。つまり、ハロースピンはコアに対して環境 (熱浴) 成分であり、これによって系全体が保存系であるにもかかわらず統計的な性質を呈する。また、ハロースピンは空間的に局所磁場構造を作り、これは観測されている地磁気の逆磁束斑に対応するだろう。(図 4 左) は、各スピンの角度 θ_i だけを単位円上に並べたものである。

さらに、我々の結合スピンモデルは、蔵本モデルと類似して、回転する各スピンの引き込み (同期) 現象を記述する (Kuramoto 2003, Acebron et al. 2005)。両者は基本的にはポテンシャル項の形が異なるだけで、同じ物理をあらわす。後者は、結合定数が閾値を越えると、多数の振動子がお互いの相互作用でひとつの安定なリズムを作り出す。その例は自然界に数多く存在する: たとえば、蛍の集団発光、壁に掛けたたくさんの時計の同期、メトロノームの共鳴、太陽による生態リズム、月・水星の自転と公転周期 (尽数関係)、心鼓動、脈動星、…。我々は後で、この同期構造を反映した磁場変動の典型として太陽磁場を同じ結合スピンモデルで解析する。

このように、我々の結合スピンモデルは、「コア・ハロー構造」と「同期構造」という特徴を持っている。

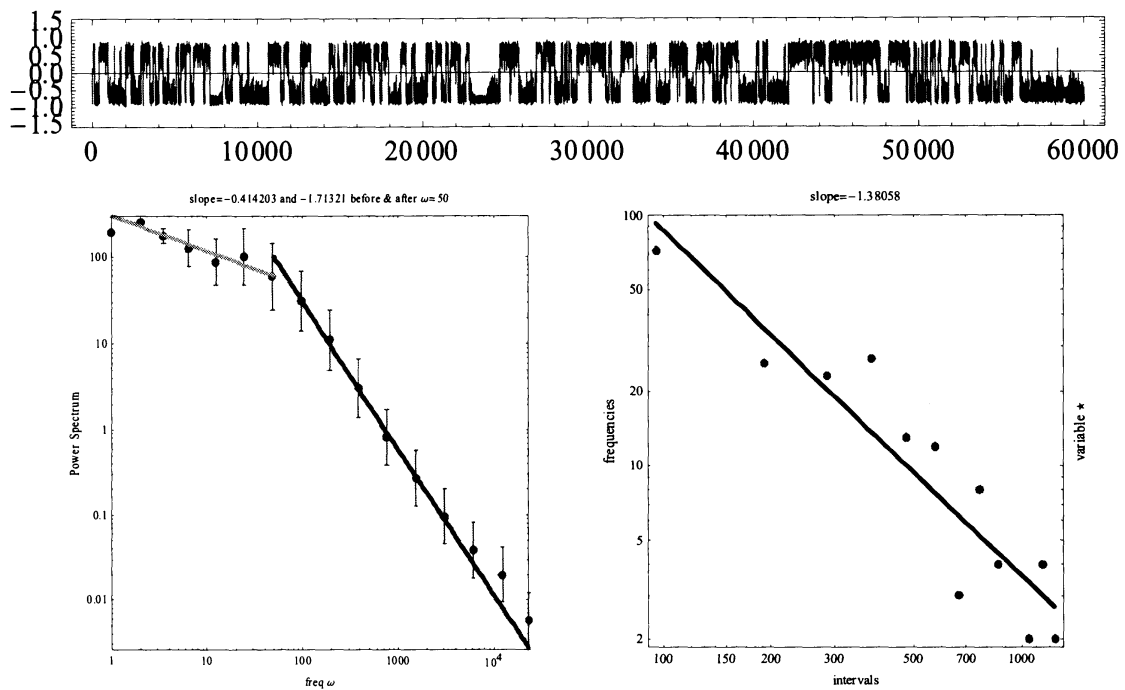


図 2: 式 (3) で記述される結合スピンモデルの解析結果。設定したパラメータは $\mu = -1$ 、 $\lambda = -1.8$ 、 $N = 9$ 。(上) 結合スピンモデルにより計算された、磁極変動の典型的時系列。横軸は計算時間。縦軸は、式 (4) で定義された $M(t)$ の自転軸への射影。(左下) 結合スピンモデルにより計算された典型的な磁極変動時系列 (図 5) のパワースペクトル。傾きが -0.4 、および -1.7 の 2 つのべきで特徴付けられる。(右下) 結合スピンモデルによる、磁極変動時系列の磁極一定期間の頻度分布。傾き -1.4 のべき則で特徴付けられる。

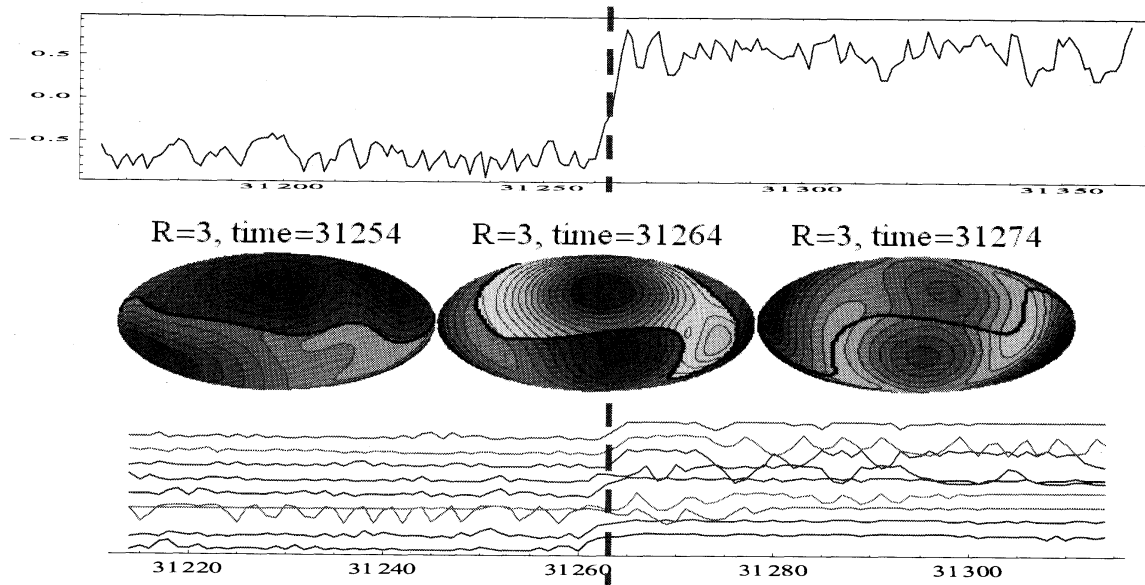


図 3: 典型的な磁極反転 ($t = 31264$) の前後の磁場の振る舞い。時間はいずれも左から右に流れる。(上) 反転前後における $M(t)$ の自転軸方向の大きさの変化。磁極安定期間に比べて、急激に磁極反転する。(中) 地球表面で観測される磁場 \vec{B} の地表法線方向の大きさの等高線。式 (5) からの計算。反転前、反転中、反転後の様子。(下) 9 個のスピンのそれぞれの自転軸方向への大きさの時間変化。

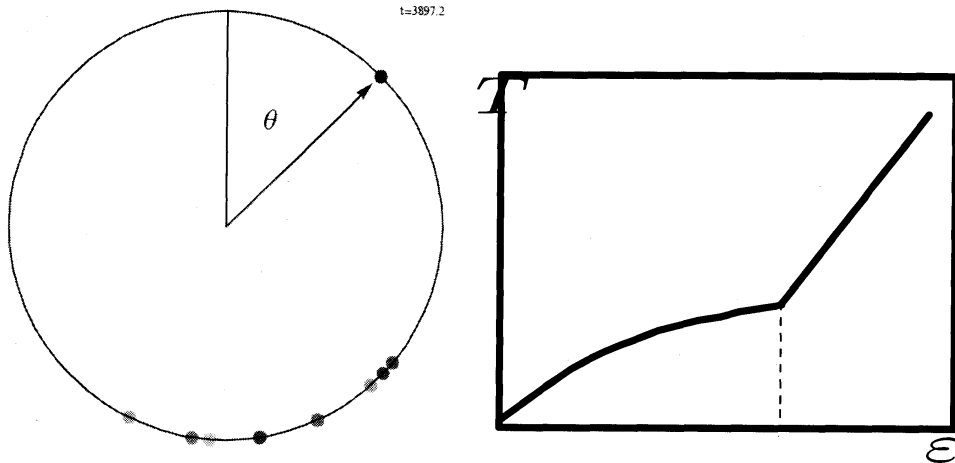


図 4: 結合スピンモデルと HMF モデルの類似。(左) スピンたちの向き θ_i を単位円上に点で示した。下のほうに固まっているのがコア相のスピン、全体に散らばっているのがハロー相のスピンである。両者の区別は必ずしも明確ではない。(右) HMF モデルの相図 (模式図)。横軸はスピン 1 個あたりのエネルギー、縦軸は温度である。縦の点線で表された相転移点があり、その左の低温側でコアが形成される。

5 他の惑星、衛星、星

結合スピンモデルはどれほど普遍的だろうか？地球以外の惑星にも衛星・恒星にも広く双極磁場がダイナモ作用によって生成・維持されている。これらと我々のモデルとの関わりを見ていこう。

まず、磁場が安定して維持される定常状態を保障するためには、平均的なエネルギーバランスが必要である。つまり、磁場の誘導方程式における定常条件 $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + (\mu_0 \sigma)^{-1} \Delta \vec{B} = 0$ から、線形に入っている \vec{B} に無関係に、

$$v \approx (\gamma \mu_0 \sigma R_c)^{-1} \quad (6)$$

が成立するべきことがわかる。ここで、 R_c は鉄コア半径、因子 γ はそれとテイラーセルサイズとの比である。一方、テイラーセル近傍の内部磁場 B_{in} 自身はコリオリ力 $-2\rho_0 \vec{\Omega} \times \vec{v}$ と磁気圧力 $\vec{j} \times \vec{B}$ とのバランスで決まり、

$$B_{in} \approx (2\rho_0 \Omega v \mu_0 \gamma R_c)^{1/2} \quad (7)$$

となる。これが作る磁力線を地表まで外挿して、直接観測される外部磁場 B_{out} が、

$$B_{out} = N \gamma^2 \left(\frac{R_c}{R} \right)^2 \left(\frac{2\rho_0 \Omega}{\sigma} \right)^{1/2} \quad (8)$$

ときまる。ここで、 N はテイラーセルの数、 R は地球半径である。対応する（仮想）磁気モーメント d は

$$d \equiv B_{out} R^3 = N \gamma^2 R_c^2 R \left(\frac{2\rho_0 \Omega}{\sigma} \right)^{1/2} \quad (9)$$

ときまる。

地磁気の場合は、式 (6,8) に、 $N = 9$, $R = 6357\text{km}$, $R_c = 3480\text{km}$, $\sigma = 3 \times 10^5 \text{ Siemens/m}$, $\rho_0 = 5497\text{kg/m}^3$, そして $\gamma = 10^{-1}$ として $B_{out} = 0.4 \times 10^{-4} \text{ Tesla}$, $v = 7.62 \times 10^{-6} \text{ m/sec}$ を得る。

さて、上の式は磁気流体力学の基礎方程式とダイナモが部分からなることだけしか使っていないので、天体磁場の普遍的な情報を与えると思われる。実際、上式 (9) で唯一定まらない因子、それはおそらく我々のダイナモ要素の特性にかかわる因子だと思われるが、それを

$$N \gamma^2 \propto M^{1/2} \quad (10)$$

と仮定して、 $d/(R^3 \sqrt{2\rho_0 \Omega / \sigma} M^{1/2})$ を天体質量 M に対して描いてみると、図 (5) のようにスケールする。つまり、8 桁の質量範囲の天体に対して、この量は 1 桁の範囲で定数である。このことは上に仮定したスケール式 (10) を支持する。たとえば太陽の場合、 γ を一定とすると、 $N \approx 5 \times 10^3$ となる。

6 太陽

前の節のスケールングで示唆された結合スピンモデルの普遍性に基づいて、地球と並んで磁極変動のよく観測されている太陽の磁場について考えてみよう。これはほぼ 22 年周期で極性が変わり、ほぼ 11 年周期の太陽活動変動と連動している。図 (6) に、ここ数百年の太陽黒点数

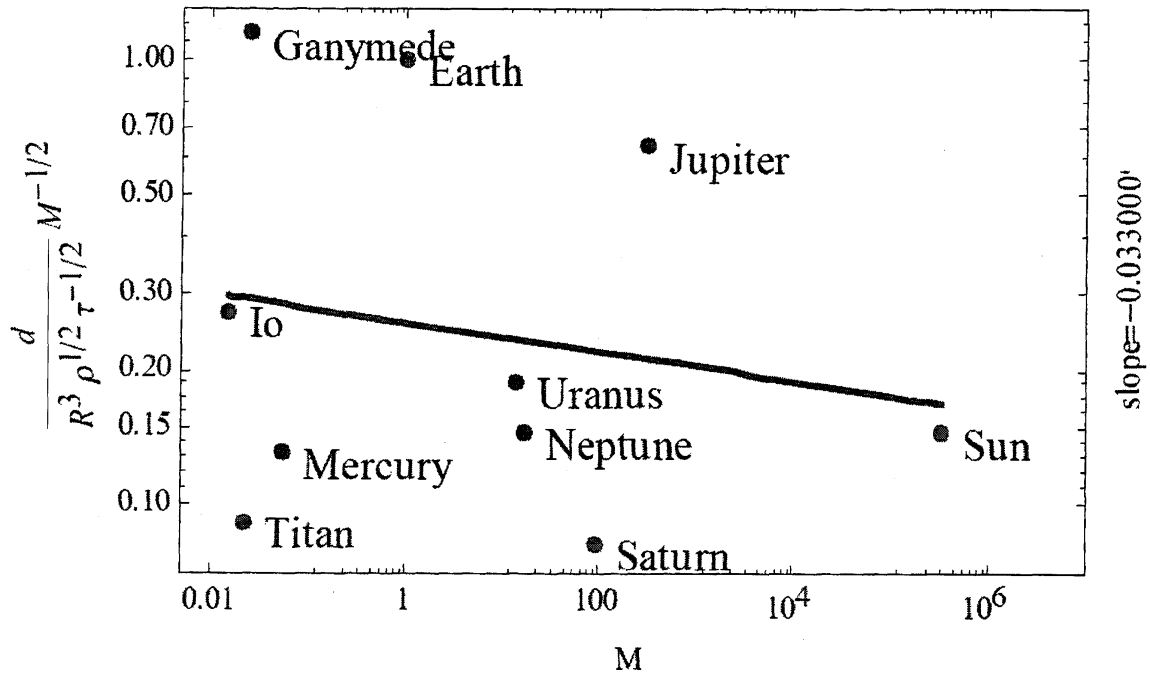


図 5: 観測された天体の磁気モーメントと結合スピンモデルで得られたその表式との比 $d / (R^3 \sqrt{2\rho_0 \Omega / \sigma} M^{1/2})$ を天体質量 M に対して描いた。データは Stevenson (2010)。横軸質量は8桁の広がりに対して、縦軸は1桁。これから、 $N\gamma^2 \propto M^{1/2}$ 、というスケーリングが示唆される。なお、データには、現在ダイナモ作用が働いていないと考えられる火星と金星のデータは入っていない。

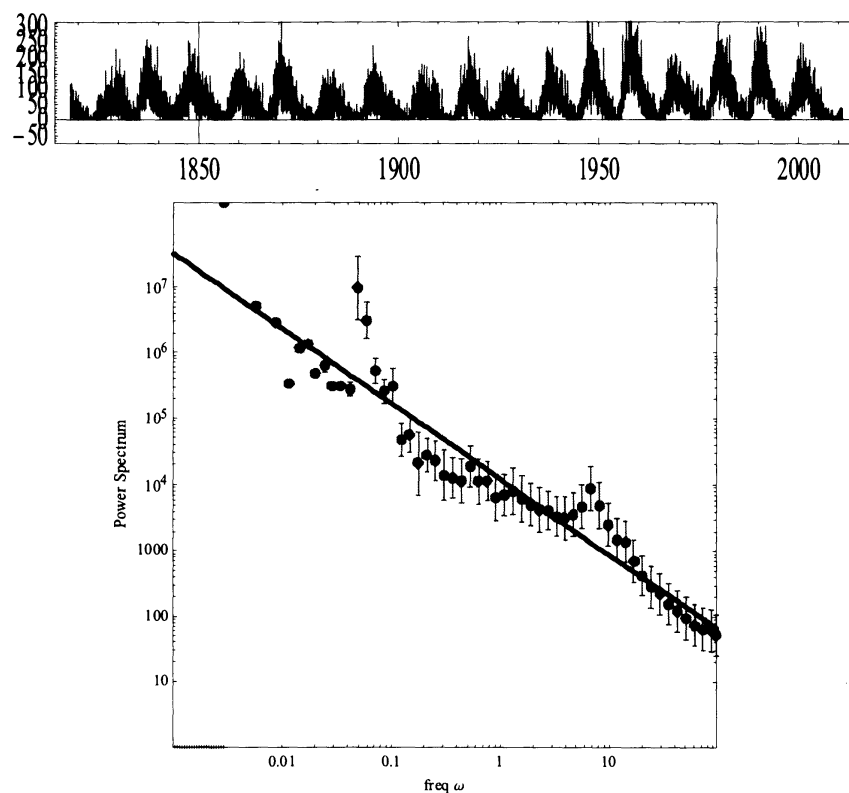


図 6: (上) 太陽黒点数時系列。(下) そのパワースペクトル。太陽黒点数変化は、だいたい太陽磁場変動の時系列とみなしてよいだろう。11 年周期のほかに 1 ヶ月ほどの周期は自転による見掛けの変化である。全体に $1/f$ 揺らぎが見られる。

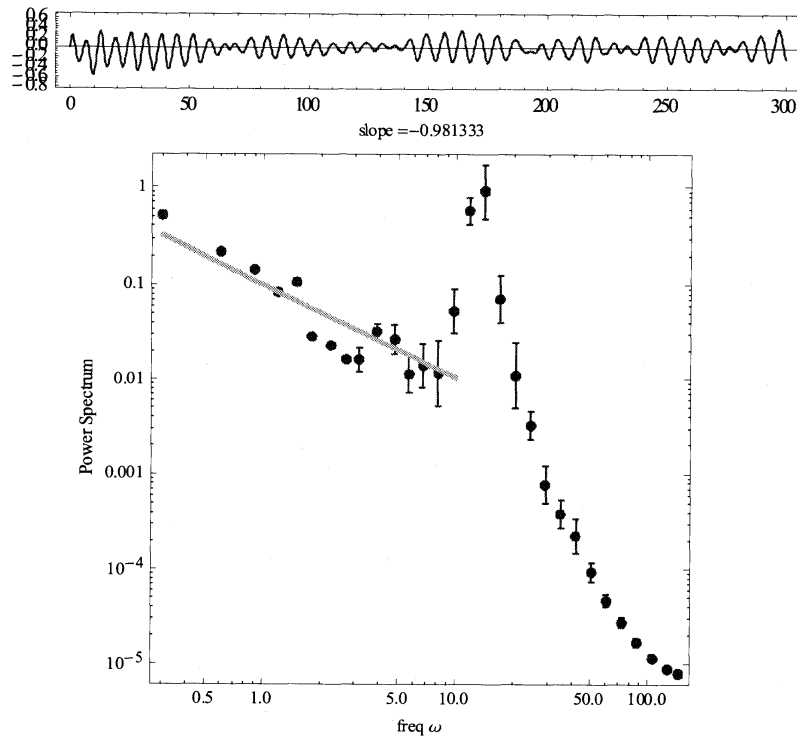


図 7: (上) 結合スピンモデルによる磁場変動時系列。(下) そのパワースペクトル。1つの周期のほかに、低周波でべき的に振舞う。ただし、太陽のデータに見られる高周波サイドでの幂的振る舞いは再現できていない。パラメータは、 $N = 501, \mu = -0.1, \lambda = -1$ 。初期に、スピンの向きはランダムで、その時間変化は、エネルギーが正になるように選んだ。

時系列とそのパワースペクトルを描いた (SIDC 2011)。ほぼ 11 年周期に対応するピークのほかに、傾き -1.1 のべき的な振る舞いが特徴的である。結合スピンモデルはこのような太陽磁場変動の特徴を再現するだろうか？

実際我々の結合スピンモデルで、スピン 1 個あたりの平均エネルギーを上げ、スピン数を増やすと、これと同様の時系列が得られる。(図 7)。

結合スピンモデルではパワースペクトルに、ひとつの周期とともに低周波領域でべき的振る舞いが見られる。べきの指数はパラメータによるので正確な $1/f$ 揺らぎが普遍的ではないが、低周波領域でべき的振る舞いをするのはこのモデルに普遍的である。また磁場変動の時系列に、マウンダー極小期を思わせる低活動期が存在するが、この領域でも準周期性は残っている。

これらの振る舞いは、スピン間結合による引込み現象として理解できる。実際、(図 4 左) のダイアグラムで太陽の場合の各スピンの運動を見てみると、スピンが同期して運動する様子がわかる。

7 まとめ

地磁気の反転ダイナミクスを記述する現象論モデルとして、結合したマクロスピンモデルを提案し解析した。このモデルは、長距離力を持つ平均場 (HMF) モデルと類似で、コア・ハロー

構造を持ち、これがそれぞれ地磁気の定常成分・変動成分に相当する。さらにこのモデルは倉本モデルと類似で、引き込み現象も記述する。つまり、地磁気ダイナミクスだけでなく、準周期的な太陽磁場変動の特徴も良く再現する。さらにこの準周期性とともに、低振動数領域で普遍的にべき的な揺らぎが存在することも見出され、太陽の場合と整合する。さらにこのモデルを元に、惑星・衛星・太陽にわたる磁気モーメントの大きさに対するスケーリング則が得られ、モデルの普遍性が示唆された。

地磁気の観測をよく再現するこの結合スピンモデルは以下の論理で動機付けられるだろう。これらの論理を確立していくことが、我々の次の課題でもある。

1. MHD 方程式+境界条件（マントルなど）で地球磁場のすべてが記述できる。
2. レイノルズ数が 10^8 なので核の流体鉄は乱流で、多数の「渦」が主要構造であろう。
3. 一方、テラー数が 10^{16} なので、渦は自転軸に沿う傾向を持つ（テイラー・プラウドマンの定理）。
4. 渦方程式と磁場方程式の類似から、「巻き込み」があれば、磁場が揃い増幅するからそれぞれの渦に巻きつく電流が局所的に小さなダイナモ機構を持つだろう。これをマクロスピンの同定した。
5. そのような条件を満たす渦として巻き込み構造を持つ anti-cyclone が有用だろう。
6. ベクトルであるスピンたちの最も簡単な相互作用はお互いの内積であり、これからスピンに対する運動方程式が作られる。
7. 以上から、地球磁場に対して結合スピンモデルがでてくる。

さらにもっと広く、磁場やダイナモ機構は、惑星・恒星・衛星に付随するだけでなく、星団、銀河、銀河団にいたるまで、宇宙にあまねく存在する（図8）。我々のダイナモ要素の考えを基に構築した結合スピンモデルが、この宇宙の磁場の階層構造を解明する第一歩となれば大変興味深い。

参考文献

- [1] Acebron, J. A., Bonilla L. L., Perez, C.J., Ritort F., Spigler R., 2005, Reviews of Modern Physics, 77, 137. (http://scala.uc3m.es/publications_MANS/PDF/finalKura.pdf)
- [2] Antoni M., Ruffo S., 1995, Phys. Rev. E52, 2361
- [3] Campa A., Dauxois T., Ruffo, S., 2009, Phys. Rep., 480,57., 2004, Fractals, 12 405
- [4] William G., 1600, De Magnete (About the Magnet). Tr. 1893 from Latin to English by Mottelay P. F., Dover Books
- [5] Kida S., Kitauchi H., 1998, Prog. Theor. Phys., 130, 121
- [6] Kono M., Roberts P., 2002, Rev. Geophysics, 40, 4-1.anetary Interiors, 182 179

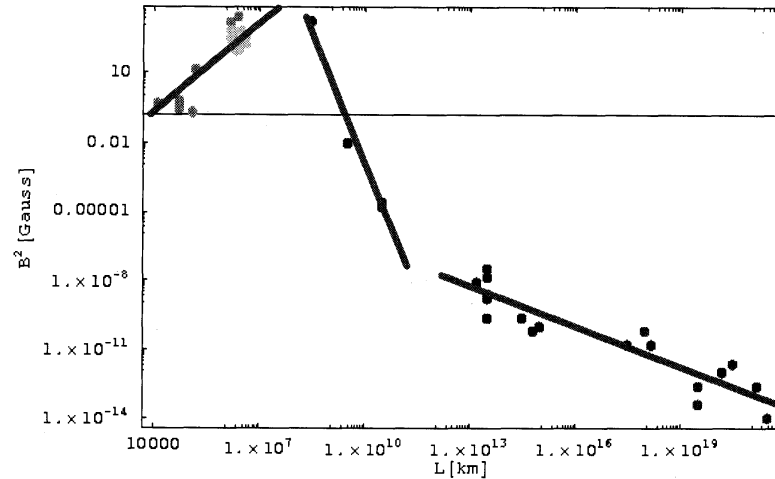


図 8: 天体のスケールと、そのスケールで平均した磁場の強さとの関係。3つのカテゴリーに分類できる。スケールの小さいほうから、惑星、衛星、恒星のグループ、星間雲のグループ、そして球状星団、銀河、銀河団のグループ。我々は第1グループを扱った。第3グループに関しては（Nakamichi & Morikawa 2010）参照。

- [7] Kuramoto Y., 2003, Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Dover Publications
- [8] Mori N., Schmitt D., Ferriz-Mas A., Wicht J., Mouri H., Nakamichi A., Morikawa M., 2011, will be submitted.
- [9] Akika Nakamichi and Masahiro Morikawa JCAP01(2010)011.
- [10] Roberts P. H., Glatzmaier G. A., 2000, Rev. Mod. Phys., 72, 1081
- [11] SIDC, 2011, <http://sidc.oma.be/> daily sunspot numbers from 1812.17
- [12] Stevenson D. J., 2010, Space Science Reviews, 152, 651